Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
не объясняющему нормально электрод
рассказчику баек
и программы каждого курса мехмата и НМУ за 15 мин
стильно одевающимся
и улыбчивому, как Степаньянц
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Семинарист: Вы знаете, что такое p-адические числа? Сейчас расскажу. Я в прошлый раз рассказывал про кольцо…

Ранее мы считали потенциал от разных электростатических систем (диполей и квадруполей). Ну, а если взять от потенциала градиент, то получим и напряжённость.
Теперь нас будет интересовать энергия взаимодействия двух систем и сила, действующая на каждую их них.

У нас есть пары (сразу говорюсь – каждую из двух систем в паре будем считать точечной):
1) Заряд-заряд
2) Заряд-диполь (5.1)
3) Заряд-квадруполь (5.3)
4) Диполь-диполь (5.2)
5) Диполь-квадруполь (5.3а)
6) Квадруполь-квадруполь
(на всякий случай напомню, что под диполем я понимаю систему суммарным зарядом 0, где мы пренебрегаем квадрупольным слагаемым, оставляя одно дипольное, а квадруполем – где нулю равны и суммарный заряд, и дипольный момент, и мы также пренебрегаем слагаемыми более высокими порядка, нежели квадрупольное).
Пара заряд-заряд элементарна, там силу и энергию взаимодействия вы и так знаете. Пара квадруполь-квадруполь слишком сложна, её и нет в методичках с задачами. Остальные пары есть.

Алгоритм решения подобных задач такой:
1) Из двух систем берём сложную (если две одинаковые – любую из них). Она становится нулём координат, а простая система – точкой наблюдения.
2) Считаем потенциал сложной системы
3) Пытаемся понять, как этот потенциал действует на простую систему.
Если сложная система – квадруполь, то советую одну из осей координат для удобства направить на менее сложную систему. Это можно сделать и если сложная система – диполь, но для квадруполей это полезней.

Начнём с пар, где лёгкой системой будет заряд:
2) Заряд-диполь.
Более сложная система – диполь. Она в центре координат. А заряд на расстоянии r чувствует от диполя потенциал

$$\varphi = \frac{1}{r^3}(\bar{p}\,\bar{r})$$

Домножив на заряд в точке наблюдения, получим потенциальную энергию:

$$W = \frac{q}{r^3}(\bar{p}\,\bar{r})$$

Иногда этот ответ записывают немного по-другому: проецируют дипольный момент на радиус-вектор от сложной системы к простой. Записав эту проекцию как p_r, можно избавиться от скалярного произведения:

$$W = \frac{q p_r}{r^2}$$

Правильны оба ответа, просто это разная запись одного и то же.
А чтобы найти силы, нужно взять минус градиент от энергии. Давайте, чтобы было понятней, всё-таки проведём через наши системы ось абсцисс. Тогда энергия превратится в силу:

$$-\frac{q \cdot p_r}{r^3}\,\bar{e}_r$$

Если вам не очевидно, как так быстро был подсчитан градиент без всяких операторов набла, проведите-таки ось x через наши системы, замените везде r на x. Тогда из всего градиента выживёт только слагаемое d/dx * $\mathbf{e}_x$. Взяв одномерную производную, получите ответ.

3) Заряд-квадруполь. Формула потенциала квадруполя:

$$\frac{1}{r^5}\cdot\sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}} D_{\alpha\beta}\cdot r_\alpha r_b$$

Направим ось x для удобства к точечному заряду. Тогда из суммы выживут всего три слагаемых:

$$\frac{1}{r^5}\cdot\sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}} D_{\alpha\beta}\cdot r_\alpha r_b = \frac{1}{r^5}\sum_{\beta\in\{x,y,z\}} D_{x\beta}\, r_x r_\beta$$

Координаты заряда будут (r, 0, 0), и на самом деле слагаемое будет одно:

$$\frac{D_{xx}}{r^3}$$

Это мы нашли потенциал в точке наблюдения (кстати, лишний раз убедились: потенциал заряда убывает как $1/r$, диполя как $1/r^2$, квадруполя как $1/r^3$. Чтобы получить потенциальную энергию, просто домножим на заряд в точке наблюдения:

$$W = \frac{D_{xx}\, q}{r^3}$$

А если нужна сила – возьмём градиент от потенциальной энергии, это будет по модулю

$$3\frac{p_x x q}{r^4}$$

Замечание: некоторые семинаристы называют ось, соединяющие системы, r и проекции обозначают, соответственно, индексом r, а не x. Я считаю, что r и так слишком много. Так что будет x, хотя по сути это одно и то же.

Переходим к парам, где простая система будет диполь. Тут всё будет чуток сложнее.
4) Диполь-диполь.

$$\varphi = \frac{1}{r^3}(\bar{p}\,\bar{r})$$

Потенциал диполя у нас есть:
Теперь нам надо понять, как реагирует другой диполь на этот потенциал. Тут не обойтись без соотношений с общефиза:

Вставка из общефиза:
На диполь дипольный моментом p, на который действует напряжённость E, обладает потенциальной энергией

$$W = \bar{p}\,\bar{E}$$

И на него действует момент сил

$$\vec{M} = [\bar{p} \times \bar{E}]$$

А вот как же нам найти поле E в точке наблюдения? Правильно: минус градиент от потенциала. У нас, впрочем, уже есть подсчитанная сила

$$-\frac{q \cdot P_z}{z^3}\bar{e}_z$$

Можем её на заряд поделить и получим напряжённость.

$$-\frac{P_z \bar{e}_z}{z^3}$$

Вот пусть читатель ту напряжённость и подставит в формулу для энергии и момента сил. Если что, у нас два дипольных момента: один будет в формуле для напряжённости (это дипольный момент диполя в центре координат), другой – дипольный момент точки наблюдения. Если они не равны, надо там будет поставить индексы p_1 и p_2.

Ну а сила будет минус градиент от W, т.е.

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}(\vec{p}\vec{E})$$

Последняя пара и можно будет валить из уника домой. Ой, не то значение слова «пара». Имеется в виду пара квадруполь-диполь.
Квадруполь в начало координат!

$$\frac{D_{xx}}{r^3}$$

У нас уже есть готовая формула для потенциала:
Берём градиент и находим напряжённость:

$$\vec{E} = -3\frac{D_{xx}}{r^4}\vec{e}_x$$

Подставляем в наши формулки и находим потенциальную энергию

$$-3\frac{D_{xx}p_x}{r^4}$$

А сила тогда будет, если мы ещё раз продифференцируем:

$$12\,\frac{D_{xx}\,p_x}{r^5}$$

И момент там сил

$$-\,\frac{3D_{xx}}{r^4}\,[p \times e_x]$$